数　列　と　積　分
ー積分の高大接続ー

城西大学理学部数学科　山口博

1　背景および目的

高校において数列の極限は数学Ⅲで, また, 積分は数学Ⅱ, 数学Ⅲで取り上げられている. ただ, 数学Ⅱ, 数学Ⅲで取り上げられている積分（定積分）は積分が存在する関数（数学Ⅱにおいては多項式関数）に対し, 積分を計算させる形で取り上げられることが多い. 数学Ⅲの積分の応用として, リーマン 和から得られる数列の極限が定積分と一致することが示されている.

本講義では（有界）閉区間上の有界関数に対するリーマン積分の定義を行い, 連続関数はリーマン積分可能であることを述べる. 数学Ⅱ, 数学Ⅲで取り上げられる関数はほとんどが連続関数であるので, そのような関数に対しては積分（リーマン積分）の存在が裏付けられることになる.

不連続点が有限個の関数はリーマン積分可能であることは, 比較的容易にわかるが, 不連続点の集合が可算集合である関数もリーマン積分可能になる. しかし, 連続でない関数でリーマン積分可能でないものも存在することを示す. このような現象を理解するためにはリーマン積分だけでなく, ルベーク積分を待たなければならない.

本講義は 2006 年 1 月 30 日（月）秩父高校で行った模擬授業と城西大学オープンキャンパス（2006 年 5 月 20 日（土)）での模擬授業の内容を修正し、加筆したものである.

2　積分の高大接続

ここでは Riemann 積分の定義を述べるが, 最初に数列の極限を取り上げる. 厳密な定義である $\varepsilon-\delta$ 論法についても触れる.　記号　$\mathbb{R}$,　$\mathbb{N}$,　$\mathbb{Z}$,　$\mathbb{Q}$　はそれぞれ実数全体, 自然数全体, 整数全体, 有理数全体を表すものとする.

2.1　数列

$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$:　数列　$(a_i \in \mathbb{R};\, i = 1, 2, 3, \cdots)$．これを　$\{a_n\}$　で表す. a_k をこの数列の第 k 項という.　特に, a_1　を初項という.

○　数列の極限

$\{a_n\}$: 数列.　n　が大きくなるとき、a_n　が限りなく a に近づくとき、$\{a_n\}$　は　a　に収束するといい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{または,} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

で表し, a　を $\{a_n\}$　の極限値という.　$\{a_n\}$　が収束しないとき, $\{a_n\}$　は発散するという.

数列の極限の定義を $\varepsilon - \delta$　論法で述べると次のようになる.

定義 1.　($\varepsilon - \delta$　論法)　$\{a_n\}$:　数列.　$a \in \mathbb{R}$.
　$\{a_n\}$ が a に収束 $\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N};\ n \geqq m \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$
このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$　または, $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ と表し, a を $\{a_n\}$ の極限値という.

注意　　定義 1 の右辺は, 数学の記号を用いて述べてあるが, 次のような意味である :
任意の $\epsilon > 0$ に対し, 自然数 $m \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geqq m$　なる自然数　n に対し, $|a_n - a| < \epsilon$ が成り立つ.

○　収束・発散の例

例 2.1　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

例 2.2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

例 2.3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$
（理由：　$\displaystyle\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　）.

例 2.4　$\displaystyle a_n = \frac{n^2}{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots).$　このとき、$\{a_n\}$　は発散する.
（理由：　$\displaystyle\frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}} \geqq \frac{n}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$ ）.

例 2.5　$0 < a < 1$　のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$

2.2　級数

数列 $\{a_n\}$ にたいして、

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \text{ または } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書いたものを級数という. a_n をこの級数の第 n 項という.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \, (= a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

を第 n 部分和という. 数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に収束するといい、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \text{ または、} a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

などで表す. S を級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和という.　数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するという.

例 2.6　$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

例 2.7　$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例 2.8　$r > 0 \, (r \neq 1)$, $a \neq 0$.　このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

例 2.9　$0 < r < 1$, $a \neq 0$.　このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

(理由： $r^n \to 0 \, (n \to \infty)$ に注意しておく.

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \to \frac{a}{1-r} \;\; (n \to \infty). \qquad \text{従って,} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}. \text{)}$$

2.3 積分

$\mathbb{R}$ の部分集合 E と $a \in \mathbb{R}$ に対し, 任意の $x \in E$ に対し, $x \leqq a$ $[x \geqq a]$ のとき, E は上に有界 [下に有界] といい, a を E の上界 [E の下界] という. E に含まれる E の上界 [下界] を E の最大数（または最大元）[最小数（または最小元）] といい, $\max E$ $[\min E]$ で表す. 最大数, 最小数は存在する場合もあり, 存在しない場合もある. 例えば, $E = (0, 1]$（左開区間）の時, $\max E = 1$ で, $\min E$ は存在しない.
$\mathbb{R}$ の空集合でない部分集合 E が上に有界 [下に有界] なとき, E の上界全体 [下界全体] の集合を F とする. もし, $\min F$ $[\max F]$ が存在するとき, $\min F$ $[\max F]$ を E の上限 [下限] といい, $\sup E$ $[\inf E]$ で表す. 次のワイエルストラスの公理を公理として認めることにする.

<u>ワエルストラスの公理</u>
$\mathbb{R}$ の空集合でない部分集合 E が上に有界 [下に有界] ならば, $\sup E\,[\inf E]$ が存在する.

$I = [a, b]\,(= \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x \leqq b\})$: 閉区間（但し、$a < b$）.
$f(x) : I$ 上の有界関数.　(i.e., $\exists M > 0;\ |f(x)| \leqq M$ $(\forall x \in I)$).
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b : [a, b]$ の分割 (x_i : この分割の分点).
$\|\Delta\| = \max\limits_{1 \leqq k \leqq n} (x_k - x_{k-1})$ とおく. これを Δ の "目" (mesh) という.
$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k \,(k = 1, 2, \cdots, n)$ にたいして、

$$S(f, \Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を f の（分割 Δ に関する）リーマン和という.

定義 2.　ある実数 J が存在し、$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$ なる ξ_k の取り方によらず、

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(f, \Delta, \{\xi_k\}) = J$$

となるとき、f は I で（リーマン）積分可能であるといい、J を f の I 上での（リーマン）積分といい、

$$J = \int_a^b f(x)\,dx \;(= \int_I f(x)\,dx = \int_I f\,)$$

等で表す.

$f(x)$ を $[a,\, b]$ 上の関数とする. 点 $c \in [a,\, b]$ について

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

であるとき, $f(x)$ は $x = c$ で連続であるという. そして, $f(x)$ が $[a,\, b]$ の各点で連続であるとき, $f(x)$ は $[a,\, b]$ で連続であるという. すると次が成り立つ.

定理 1. $f(x) : [a,\, b]$ 上の連続関数 $\Longrightarrow f(x) : [a,\, b]$ で積分可能

定理 1 の証明は省略するが, 証明には $[a,\, b]$ 上の連続関数が $[a,\, b]$ で一様連続であるという性質が用いられる ([2] 参照).

○　リーマン積分の簡単な例.

例 2.10 $\displaystyle\int_0^1 2\, dx = 2.$

例 2.11 $\displaystyle\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$

(理由： $f(x) = x \, (x \in [0,1])$
$\Delta_n : [0,1]$ を n 等分する分割. すなわち, $x_k = \frac{k}{n} \, (k = 0,1,2,\cdots,n)$. このとき, $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$.
$\xi_k = \frac{k}{n} \, (k = 1,2,\cdots,n)$ とすると、

$$R(f, \Delta_n, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1).$$

$n \to \infty$ のとき、$\|\Delta_n\| \to 0$ に注意して、

$$\lim_{n \to \infty} R(f, \Delta_n, \{\xi_k\}) = \frac{1}{2}. \qquad \therefore \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.\ )$$

例 2.12 $\displaystyle\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}.$

(理由： $f(x) = x^2 \, (x \in [0,1])$
$\Delta_n,\, x_k,\, \xi_k$ を前の例の通りとする. すると,

$$R(f, \Delta_n, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

従って、

$$\lim_{n \to \infty} R(f, \Delta_n, \{\xi_k\}) = \frac{1}{3}. \qquad \therefore \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}.\ )$$

例 2.13

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [0,1]\text{: 有理数}) \\ 0 & (x \in [0,1]\text{: 無理数}) \end{cases} \Longrightarrow f : [0,1] \text{ で (Riemann) 積分可能でない.}$$

(理由： $f(x)$ は [0, 1] の各点で連続でないことに注意しておく.
$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ を [0, 1] の任意の分割とし,

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$: 有理数, $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$: 無理数

とする. すると,

$$S(f, \Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 1,$$
$$S(f, \Delta, \{\eta_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0.$$

従って, $\|\Delta\| \to 0$ としたとき, どのような $x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$ に対しても一定の極限値,
$\lim\limits_{n\to\infty} R(f, \Delta_n, \{\xi_k\})$ は存在しない.)

積分を取り扱うのに, 上積分, 下積分を考えるやり方がある. このことに触れておく.
$[a, b]$ を $\mathbb{R}$ の閉区間とし, f を $[a, b]$ 上の（実数値）有界関数とする. $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対し,

$$u_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \ell_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

とし,

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - x_{i-1}), \qquad \underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x_i - x_{i-1})$$

とおく. すると, 任意の $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対し,

$$\underline{S}(f, \Delta) \leqq S(f, \Delta, \{\xi_k\}) \leqq \overline{S}(f, \Delta)$$

が成り立つ. そこで,

$$\overline{S}(f) = \inf\{\,\overline{S}(f, \Delta) : \Delta\}, \qquad \underline{S}(f) = \sup\{\,\underline{S}(f, \Delta) : \Delta\}$$

とおき, $\overline{S}(f)$ を f の上積分, $\underline{S}(f)$ を f の下積分という. このとき, $\underline{S}(f) \leqq \overline{S}(f)$ が成り立つ.
次の定理はダルブーの定理と呼ばれる.

定理 2. $\overline{S}(f) = \lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(f, \Delta), \quad \underline{S}(f) = \lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}(f, \Delta)$

証明. [3] または [4] を参照.

リーマン積分可能性は上積分, 下積分を用いて次のように特徴づけられる.

定理 3. f を $[a, b]$ 上の有界関数とする. すると, 次は同値.

(1) f は $[a, b]$ でリーマン積分可能.

(2) $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$.

証明. (2) $\Rightarrow$ (1): $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を $[a, b]$ の分割とし, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ とする. すると,

$$\underline{S}(f, \Delta) \leqq S(f, \Delta, \{\xi_k\}) \leqq \overline{S}(f, \Delta)$$

であるから, 定理 2 と (2) の仮定より

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(f, \Delta, \{\xi_k\}) = \overline{S}(f)\,(= \underline{S}(f)).$$

従って, f は $[a, b]$ でリーマン積分可能.

(1) $\Rightarrow$ (2): 任意の $\epsilon > 0$, $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対し, $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(2)} \in [a, b]$ で

$$f(\xi_i^{(1)}) < \ell_i + \frac{\epsilon}{n(x_i - x_{i-1})}, \quad f(\xi_i^{(2)}) > u_i - \frac{\epsilon}{n(x_i - x_{i-1})}$$

なるものが存在する. 但し, $\ell_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $u_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. すると,

$$\begin{aligned}
(a) \qquad S(f, \Delta, \{\xi_k^{(1)}\}) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(1)})(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} \ell_i (x_i - x_{i-1}) + \epsilon = \underline{S}(f, \Delta) + \epsilon; \\
(b) \qquad S(f, \Delta, \{\xi_k^{(2)}\}) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(2)})(x_i - x_{i-1}) \\
&> \sum_{i=1}^{n} u_i (x_i - x_{i-1}) - \epsilon = \overline{S}(f, \Delta) - \epsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. $S = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とおくと, (1) の仮定より, $\delta > 0$ が存在して,

$$\|\Delta\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} S(f, \Delta, \{\xi_k^{(1)}\}) & > S - \epsilon; \\ S(f, \Delta, \{\xi_k^{(2)}\}) & < S + \epsilon. \end{cases}$$

従って, (a), (b) より,

$$\|\Delta\| < \delta \Longrightarrow S - 2\epsilon < \underline{S}(f, \Delta) \leqq \underline{S}(f) \leqq \overline{S}(f) \leqq \overline{S}(f, \Delta) < S + 2\epsilon.$$

故に,

$$0 \leqq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) < (S+2\epsilon) - (S-2\epsilon) = 4\epsilon.$$

ここで, $\epsilon > 0$ は任意であるから, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ を得る.

例 2.14

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0,1]\text{: 無理数}) \\ \dfrac{1}{q} & (x = \dfrac{p}{q} \in [0,1]\text{: 既約分数 } (p,\, q \in \mathbb{N})) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f : [0,1] \text{ で (リーマン) 積分可能で}, \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

(理由： I = [0, 1] とおく.

Step 1. $x_0 \in I$: 有理数 $\Longrightarrow$ $f : x_0$で不連続.

実際, $x_0 = \dfrac{p}{q}$: 既約 とする. 任意の $\delta > 0$ に対して, 無理数 $x \in I$ で $|x - x_0| < \delta$ なるものが存在する. すると,

$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - \frac{1}{q}| = \frac{1}{q}.$$

従って, $f(x)$ は $x = x_0$ で連続でない. また, $x_0 = 0$ のときは, 無理数の稠密性よりわかる.

Step 2. $x_0 \in I$: 無理数 $\Longrightarrow$ $f : x_0$で連続.

実際, 任意の $\epsilon > 0$に対して, $n \in \mathbb{N}$ で $n\epsilon > 1$ なるものが存在する. すると, $A_n = \{\dfrac{p}{q} \in I :$ 既約, $0 < q \leqq n\}$ は有限集合. $\dfrac{p_0}{q_0} \in A_n$ を,

$$0 < |x_0 - \frac{p_0}{q_0}| = \min_{\frac{p}{q} \in A_n} |x_0 - \frac{p}{q}|$$

なるものとする. また $\delta > 0$を, $0 < \delta < |x_0 - \dfrac{p_0}{q_0}|$ を満たすものとする.

任意の $x \in I$, $|x - x_0| < \delta$ に対して,

○ x が有理数のとき ;

$x = \dfrac{\ell}{m}$: 既約 $(\ell,\, m \in \mathbb{N})$ とする. すると,

$$|x_0 - \frac{\ell}{m}| < \delta < |x_0 - \frac{p_0}{q_0}|$$

従って, $\dfrac{p_0}{q_0} \in A_n$ の定義より, $\dfrac{\ell}{m} \notin A_n$. 故に, $m > n$. 従って,

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(\frac{\ell}{m}) - 0| = \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \epsilon$$

$\circ$ x が無理数の時;

$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < \epsilon$$

従って, $f(x)$ は x_0 で連続である.

Step 3. f は $I = [0, 1]$ で積分可能で, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0.$、

何故なら, $I = [0, 1]$ に含まれる既約分数 $\dfrac{p}{q}$ で, $q \leqq n$ となる総数 $N(n)$ は

$$N(n) \leqq \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

I を n^3 等分する分割 Δ_{n^3} において,

$\circ$ $q \leqq n \Longrightarrow f(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{1}{q} \leqq 1;$

$\circ$ $q > n \Longrightarrow f(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{1}{q} \leqq \dfrac{1}{n}.$

従って,

$$0 \leqq \overline{S}_{\Delta_{n^3}} \leqq \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 \cdot n^{-3} + n^3 \cdot \frac{1}{n} \cdot n^{-3} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

従って, $\overline{S}(f) = 0$. 故に, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0.$

$F' = f$ を満たす関数 F を f の原始関数という. f の原始関数が求まれば, f のリーマン積分は f の原始関数を用いて求められる.

<u>注意</u> $f(x)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とし, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする. すると,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (\ F(b) - F(a) \text{ を } [F(x)]_a^b \text{ と書く})$$

(理由: $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を $[a, b]$ の分割とする. 各閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において, 平均値の定理を用いると, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ が存在して, $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. 従って,

$$\begin{aligned} S(f, \Delta, \{\xi_k\}) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

故に, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} S(f, \Delta, \{\xi_k\}) = F(b) - F(a).$)

<u>例</u>

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ (理由: $(\frac{1}{2}x^2)' = x.$ $\therefore \displaystyle\int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^2 = \tfrac{1}{2}$)

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ (理由: $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2.$ $\therefore \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{3} \cdot 0^3 = \tfrac{1}{3}$)

積分の性質を定理として述べておく.

定理 4. $f(x),\, g(x) : [a,\, b]$ 上の連続関数. $\lambda \in \mathbb{R}$. すると、次が成り立つ.

(1) （線形性） $\displaystyle\int_a^b \{\lambda f(x) + g(x)\}\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

(2) （単調性） $f(x) \leqq g(x) \quad (\forall\, x \in [a,\, b])$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leqq \int_a^b g(x)\, dx$$

このとき、もし $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$ ならば $f(x) = g(x) \quad (\forall\, x \in [a,\, b])$.

(3) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\, dx.$

証明. (1) のみ示す.
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を $[a,\, b]$ の分割とし, $\xi_i \in [x_{i-1},\, x_i]$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ とすると,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \{\lambda f(x) + g(x)\}\, dx \\
&\qquad = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \{\lambda f(\xi_i) + g(\xi_i)\}(x_i - x_{i-1}) \\
&\qquad = \lambda \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\qquad = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.
\end{aligned}$$

3 考察と結び

近年「リメデアル教育」，「高大接続」という言葉を耳にするようになった．では, 数学科において, このような用語を用いるのはどのような場合であろうか. 高校で数学Ⅲを「まったく履修していない」または「きちんと勉強していない」入学者が多くなっている現状を踏まえ, そのような学生に対し, 大学教育への橋渡しという意味合いで使われると考える．１９８０年前後にも, 高校と大学のギャップを埋める取り組みが必要であるという「気運」はあり, 当数学科においても, １年生専門選択科目として「プロセミナー」と呼ばれる少人数クラスを開設している． この時, 問題になったのは, 数学科１，２年生の微積に出てくる「ε - δ 論法」を学生に如何に理解させるかであった． 「リメデアル教育」､「高大接続」を考える時, 数学Ⅲ未履修者への教育のみならず, 「ε - δ 論法」の学習も見据えることが必要と考え, 本講義を模擬授業形式により高校生に紹介し, 数列, 積分を通して高大接続の橋渡しを行った．高校生からの反応は概して「難しい」というものであった．それでも, 公式だけ暗記して, 問題を解くだけでなく, 粘り強く証明を理解する習慣を身につけることを期待する.

参考文献

[1] 猪狩惺, 実解析入門, 岩波書店, 1996.
[2] 岡安隆照, 吉野崇, 高橋豊文, 武元英夫 共著, 微分積分学入門, 裳華房, 1995.
[3] 笠原晧司, 微分積分学, サイエンス社, 1990.
[4] 斉藤偵四朗, 解析学の基礎, サイエンス社, 1979.
[5] 杉浦光夫, 解析入門 I , 東京大学出版会, 1994.
[6] 鶴見茂, 測度と積分, 理工学社, 1981.
[7] 数学Ⅱ, 数研出版, 2003.
[8] 数学Ⅲ, 数研出版, 2003.